UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA A DISTÂNCIA

Paulo Rogério Pessoa do Nascimento

Probabilidade: Proposta de Jogos Didáticos Inspirados na Loteria

Araruna – PB
2014

Paulo Rogério Pessoa do Nascimento

Probabilidade: Proposta de Jogos Didáticos Inspirados na Loteria

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância da Universidade Federal da Paraíba como requisito para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientadora: Profª. Ms Cristiane Carvalho Bezerra de Lima

Araruna – PB
2014

Catalogação na publicação
Universidade Federal da Paraíba
Biblioteca Setorial do CCEN

N244p Nascimento, Paulo Rogério Pessoa do.
Probabilidade : proposta de jogos didáticos inspirados na loteria / Paulo Rogério Pessoa do Nascimento. – João Pessoa, 2014.
56p. : il. color.

Monografia (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal da Paraíba/EaD.
Orientadora: Profª Ms. Cristiane Carvalho Bezerra de Lima.

1. Probabilidade. 2. Probabilidades combinatórias. 3. Jogos de Loterias. I. Título.

UFPB/BS-CCEN CDU 519.212.2(043.2)

Probabilidade: Proposta de Jogos Didáticos Inspirados na Loteria

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância da Universidade Federal da Paraíba como requisito para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientadora: Profª. Ms Cristiane Carvalho Bezerra de Lima

Aprovado em: _____/______/______

COMISSÃO EXAMINADORA

____

Profª. Ms Cristiane Carvalho Bezerra de Lima
(Orientadora)

____

Prof. Dr. José Gomes de Assis (Banca Examinadora)

____

Prof. Ms Francisco do Nascimento Lima (Banca Examinadora)

Dedicatória

À minha mãe Expedita e a todos que torcem por mim.

AGRADECIMENTOS

Aos **meus pais**, que sempre estão ao meu lado, por favorecerem em especial, este momento;

A **minha orientadora**, Cristiane Carvalho Bezerra de Lima, pelo estímulo e colaboração nessa trajetória;

Aos **colegas**, pelas trocas de experiências, pelo convívio, pelas alegrias e incertezas, por todos esses momentos vividos juntos e partilhados.

“O Universo é o hospício particular de Deus, aquele que não fica louco torna-se sábio.”

Paulo Rogério

SUMÁRIO

RESUMO

O presente trabalho trata-se de uma proposta pedagógica de ensino-aprendizagem de probabilidade no Ensino Médio. Para tanto, foi criado e aplicado dois jogos: Mega-sena didática e 2 contra 23 (inspirado na Lotofácil), na turma 2ºC, vespertino, em uma escola Estadual do município de Araruna-PB. Com o intuito de desenvolver, executar e testar um método de ensino inovador, contextualizado e recreativo, da Teoria das Probabilidades. Esta proposta de ensino de probabilidades por meio de jogos está fundamentada nos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 2.000);MOURA (1992); LOPES & OLIVEIRA (1.999). Em relação a proposta de ensino de probabilidades contextualizado com dia-dia do aluno, conclui-se que a utilização de jogos vinculados à realidade do aprendiz para ensino de probabilidades, proporcionaram a motivação e interação dos estudantes na aula, além de propiciar maior compreensão dos conteúdos conceituais abordados nos jogos aplicados, mega-sena didática e 2 contra 23.

Palavras-chaves: Probabilidade. Jogos. Loterias. Mega-Sena. Lotofácil.

ABSTRACT

The present work it is a pedagogy of teaching and learning of probability in high school. To that end, we created and applied two games: Training Mega-Sena and 2 against 23 (inspired by Lotofácil), the 2 ° C class, afternoon, the State Elementary School and High School Benjamin Gomes-Maranhão Araruna-PB. In order to develop, implement and test an innovative method of teaching, contextualized and recreational, of Probability Theory. This teaching proposal probabilities through games is based on the National Curriculum Parameters - CPN (BRAZIL, 2000); Moura (1992); LOPES & OLIVEIRA (1999). Regarding the likelihood of teaching proposal set against daily lives of the student, it is concluded that the use of games related to the learner's reality for teaching probability, provided the motivation and interaction of students in class, as well as providing greater understanding conceptual contents addressed in applied games, didactic mega sena and 2 agai 23.

Keywords: Probability. Games. Lotteries. Mega-Sena. Lotofácil.

MEMORIAL DO ACADÊMICO

Nasci em 15 de Maio de 1.986 no Sítio Lagoa da Mata, Araruna-PB. Comecei estudar aos nove (09) anos de idade, fora da faixa etária escolar, devido ao receio que tinha em ir à escola, lembro-me que a principal causa de tal “medo’’ foi ter nascido com uma deficiência física no braço direito e as crianças ficavam rindo, “mangando” de mim.

Mas, felizmente, comecei a estudar o primeiro ano do Ensino Fundamental, pela manhã, na Escola Municipal Ernesto Moreira, no Sítio Baixio-Araruna-PB, 500 m da minha casa. No ano seguinte fui estudar, no turno da manhã, o segundo ano na Escola Municipal de Ensino Fundamental Maria da Conceição, no Sítio Mata Velha-Araruna-PB, a 1,4 km de casa.

Retornei à escola no ano seguinte para estudar o terceiro ano, durante o período da manhã. Depois segui meus estudos no quarto ano em outra escola no mesmo sítio, um pouquinho mais distante de minha casa, cerca de 2 km, durante o período da tarde.

Daqui em diante fui estudar, durante a tarde, o quinto ano na zona urbana de Araruna na Escola Municipal de Ensino Fundamental João Alves Torres, a 8 km de casa. Foi nesta escola que encontrei a Álgebra e me apaixonei, definitivamente, pela Matemática; a partir deste momento comecei resolver sozinho, em casa, os exercícios dos livros de Matemática dos anos posteriores do Ensino Fundamental e Médio, quando estava no Ensino Médio já dominava amplamente a Matemática e a Física do Ensino Superior. Nesta escola estudei do quinto ao oitavo ano, sempre no turno da tarde. Até aqui nunca repetira um ano escolar.

No ano 2004, com 16 anos, ingressei no Ensino Médio na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Benjamin Maranhão-Araruna-PB. Fui o “aluno nota dez” nas disciplinas de Matemática e Física, com os professores Gilliard e Miguel, respectivamente. Ou seja, fui o único aluno a terminar o ano letivo nestas duas disciplinas com média final dez.

No ano seguinte iniciei o segundo ano, mas, infelizmente, desisti devido à uma “crise nervosa”.Tentei retomar os estudos no ano seguinte, mas, novamente, não consegui estrutura psicológica para terminar o segundo ano e aí desisti de vez, passando três anos fora da escola. Com muito esforço psicológico retomei os estudos à noite, na EJA, na Escola Municipal de Ensino Fundamental e Médio João Alves Torres. Foi na EJA que terminei o Ensino Médio.

No primeiro semestre de 2010 prestei vestibular para o curso de Licenciatura em Matemática pela UAB-UFPB-Virtual, consegui êxito com a quinta colocação e no segundo semestre ingressei no Ensino Superior através do Polo-Araruna da UFPB-Virtual.

Como eu não tinha computador, tive que fazer minhas atividades no Polo-UAB-Araruna. Lembro que no primeiro dia que cheguei no Polo tive algumas dificuldades com a novidade, que era o computador e a informática para mim, pois nunca tinha usado um computador, era zero o meu conhecimento em computação, na verdade não sabia nem como ligar o computador, foi observando os outros alunos que aprendi o necessário para ligá-lo e entrar no moodle e fazer minhas atividades.

No transcorrer dos dias fui me adaptando, explorando todas as funções do computador e de lá pra cá aprendi muito em relação à informática.

Atualmente, estou preste a concluir o curso de Licenciatura em Matemática, provando que não podemos nos acomodar diante das dificuldades que a existência nos impõe. Se cheguei até aqui, porque não? Estabelecer esta minha conquista como trampolim para futuras conquistas,... mestrado, doutorado! O significado da vida é transpor barreiras consideradas intransponíveis.

Atualmente, faço pesquisas próprias nas áreas de Física Quântica, Teoria das Cordas, Relatividade Restrita e Geral.

1.INTRODUÇÃO

Objetivos gerais

E propor dois jogos, a mega-sena didática e “2 contra 23”, inspirados nas loterias, Mega-Sena e Lotofácil, respectivamente; voltados para o ensino contextuallizado de probabilidades no Ensino Médio.

Objetivos específicos

- Descrever os cálculos das probabilidades da Mega-Sena;
- Descrever os cálculos das probabilidades da Lotofácil;
- Desenvolver os dois jogos didáticos, na turma do 2º C tarde, na Escola de Ensino Fundamental e Médio Benjamin Maranhão;
- Avaliar a aplicação dos dois jogos: mega-sena didática e “2 contra 23”, como proposta pedagógica de ensino-aprendizagem no ensino de probabilidade no Ensino Médio.

Justificativa

.

É sabido que existe uma grande exigência, por parte dos educadores e dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN); no desenvolvimento de pedagogias de ensino-aprendizagem dos conteúdos matemáticos contextualizados, vinculados com a realidade do aprendiz, tornando-se prático os conceitos matemáticos abstratos expostos em sala de aula. Provocando interesse nos alunos no estudo de probabilidade; fazendo com que os estudantes encarem a probabilidade como ferramenta matemática poderosa para a compreensão de fenômenos aleatórios, tanto naturais, como sociais.

2. REFLEXÃO TEÓRICA SOBRE O TEMA:

2.1. Fundamentação teórica.

Segundo o PCN+ (BRASIL, 2002) o ensino de matemática deve estar relacionado com as transformações que ocorrem no mundo do aluno. Para tal propósito, faz-se necessário orientar os alunos para a vida além da simples reprodução de dados, classificações ou identificação de símbolos. Para tanto,segundo PCN+, é necessário o aprendiz adquirir as seguintes características:

> - Saber se informar, comunicar-se, argumentar, compreender e agir;
> - Enfrentar problemas de diferentes naturezas;
> - Participar socialmente, de forma prática e solidária;
> - Ser capaz de elaborar críticas ou propostas; e,
> - Especialmente, adquirir uma atitude de permanente aprendizado (p. 9).

Assim, é crucial sempre considerar a realidade do estudante da escola, e evitar propor conteúdos distantes da realidade sócio-cultural em que o aluno estar inserido.

Em nossa sociedade, o conhecimento matemático é essencial em uma grande variedade de situações, como apoio a outras áreas do conhecimento, como por exemplo, na Biologia, Química, Física, Sociologia. Enfim, a Matemática é a linguagem universal para todas as ciências.

Um exemplo, específico, da aplicação da matemática em outras disciplinas é o uso da Teoria das probabilidades em Genética no estudo sobre hereditariedade, no qual as noções básicas de probabilidade podem ser usadas para prever resultados de genótipos de gerações futuras.

Em relação ao cotidiano, o conteúdo de probabilidade pode ser aplicado, por exemplo, na análise e julgamento de cálculos efetuados sobre dados econômicos ou sociais ou ainda nas probabilidades de receber determinado prêmio em diversos jogos, Mega-Sena, Quina, Dupla-Sena, Lotofácil, jogo do bicho e bingo.

Os jogos representam uma importante ferramenta pedagógica para o ensino da matemática, são elementos valiosos no processo de aquisição e construção do conhecimento, pois permitem competências no âmbito da comunicação, das relações interpessoais, do trabalho em equipe, e na compreensão de conceitos matemáticos. A utilização de jogos é incentivado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais, de acordo com o PCN+ (BRASIL, 2002, p. 56).

> O jogo oferece o estímulo e o ambiente propícios que favorecem o desenvolvimento espontâneo e criativo dos alunos e permite ao professor ampliar seu conhecimento de técnicas ativas de ensino, desenvolver capacidades pessoais e profissionais para estimular nos alunos a capacidade de comunicação e expressão, mostrando-lhes uma nova maneira, lúdica e prazerosa e participativa, de relacionar-se com o conteúdo escolar, levando a uma maior apropriação dos conhecimentos envolvidos. Utilizar jogos como instrumento pedagógico não se restringe a trabalhar com jogos prontos, nos quais as regras e os procedimentos já estão determinados; mas, principalmente, estimular a criação, pelos alunos, de jogos relacionados com os temas discutidos no contexto da sala de aula.

Segundo os Parâmetros Curriculares da Matemática (BRASIL, 1998, p. 47), as atividades com jogos permitem ao professor analisar e avaliar os seguintes aspectos:

> - Compreensão: facilidade para entender o processo do jogo assim como o autocontrole e o respeito a si próprio;
> - Facilidade: possibilidade de construir uma estratégia vencedora;
> - Possibilidade de descrição: capacidade de comunicar o procedimento seguido e da maneira de atuar;
> - Estratégia utilizada: capacidade de comparar com as previsões ou hipóteses (p. 47).

Segundo Lopes (2008, p.1), as atividades lúdicas, jogos, brincadeiras, exercem um papel crucial para a construção do conhecimento, e habilidades para compreender conteúdos conceituais, estimulam o espírito de competitividade a imaginação, o raciocínio lógico, a organização, atenção e concentração dos alunos. Também, auxiliam no desenvolvimento cognitivo, afetivo, social e moral das crianças, representando um momento que precisa ser valorizado pelos professores nas atividades escolares.

Segundo Moura (1992) :

> O jogo desafia o aluno a se auto-conhecer para superar o outro enquanto na resolução do problema temos a compreensão deste por parte do aluno; no jogo, o jogador cria estratégias para ganhá-lo, enquanto na resolução do problema o aluno tem a necessidade de estabelecer um plano de solução; no jogo, o jogador “lança mão” das

> estratégias para atingir a vitória e na resolução de problema há a execução do plano de ação para a solução; no jogo, o aluno avalia sua vitória ou sua perda mediante avaliação das estratégias utilizadas em suas jogadas e na resolução de problema o aluno, embora não com freqüência, faz o retrospecto da solução encontrada para verificar se acertou ou errou (pg. 18 e 19).

3. Histórico da loteria

Segundo o dicionário Aurélio, loteria é toda espécie de jogo de azar em que se tira à sorte prêmios a que corresponde bilhetes numerados, cartões, ou meios semelhantes de apostas.

Segundo Monteiro (2007), as primeiras versões de sorteios aleatórios surgiam há milhares de anos com os hebreus, egípcios, hindus, chineses (jogo keno) e romanos.

As primeiras loterias surgiram nos países baixos em 1291 e na Alemanha no ano de 1470. No ano de 1538 a França iniciou a promoção de jogos em prol dos cofres do governo.

No começo do século XX, os jogos eram considerados ilegais na maioria dos países europeus e dos EUA, permanecendo até pós Segunda Guerra Mundial.

Só na década de 1960, os jogos lotéricos passaram a ser ferramentas governamentais de arrecadação de fundos adicionais aos obtidos pelos impostos.

4. Loterias brasileiras

No Brasil, o sistema nacional de loterias é administrado pelo Banco Caixa Econômica Federal, desde ano 1962.

A Caixa Federal administra dez loterias: Mega-Sena, Dupla-Sena, Quina, Lotomania, Timemania, Lotogol, Federal, Instantânea, Lotofácil e Loteca.

O primeiro sorteio da Mega-Sena foi realizado em 11 de Março de 1.996. Embora a Mega-Sena seja a loteria brasileira com a menor probabilidade de acerto, é a modalidade lotérica mais requisitada pelos apostadores brasileiros, devido aos seus prêmios exorbitantes. Tanto que, a mega-sena já fez grandes milionários, sendo o maior prêmio individual, até hoje, sai para a cidade Fontoura Xavier-RS, no valor de R$119.142.144,27, no dia 06 de Outubro de 2010.

Segundo a Caixa, um casal curitibano apostou durante dois anos as mesmas combinações e no concurso nº 1405 levaram a “bolada” de R$27.622.910,73. São histórias como estas que estimulam milhões de apostadores brasileiros todos os meses fazerem sua “fezinha” na Mega-Sena.

5. Regras da Mega-Sena: como apostar

Os jogos da Mega-Sena são feitos em um bilhete com duas matrizes com um rol crescente 1 a 60, onde você pode marcar, em cada matriz, no mínimo 6 números e, no máximo, 15 números (dezenas), depois entrega-se este bilhete para o lotérico e ele registra a aposta lhe entregando o recibo com as combinações escolhidas por você ou pelo sistema randômico.Veja uma foto do bilhete de apostas, abaixo:

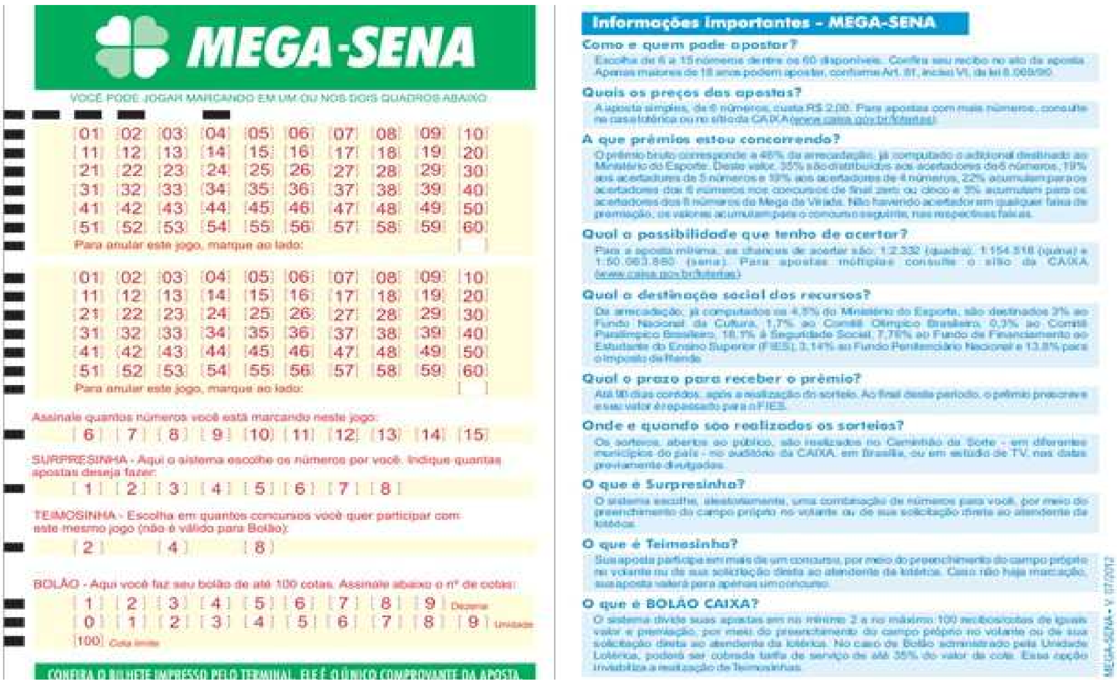

Figura 1. Modelo do bilhete Mega sena.
Fonte: Casa Lotéria Arca da Sorte.

5.1Quais são as regras de apostas e os percentuais de premiação?

Quando acessamos o site: WWW.caixa.gov.br/loterias, dispomos do seguinte texto sobre as regras e percentuais das premiações da mega-sena.

A Mega-Sena é a loteria que paga milhões para o acertador dos 6 números sorteados. Mas quem acerta 4 ou 5 números também ganha. Para realizar o sonho de ser o próximo milionário, você deve marcar de 6 a 15 números, entre os 60 disponíveis no volante. Você pode deixar que o sistema escolha os números para você (Surpresinha) e/ou concorrer com a mesma aposta por 2, 4 ou 8 concursos consecutivos (Teimosinha).

O Bolão CAIXA é a possibilidade que o apostador tem de realizar apostas e dividir com seus amigos ou familiares em várias cotas/frações, bastando preencher o campo próprio no volante ou solicitar diretamente ao atendente da lotérica. Tudo com muita segurança e garantia de recebimento do prêmio, no caso de aposta premiada.

No caso da Mega-Sena, os bolões têm preço mínimo de R$ 10,00, cada cota não pode ser inferior a R$ 4,00, sendo possível realizar um bolão de no mínimo 2 e no máximo 100 cotas.

Podemos também pode comprar cotas de bolões organizados pelas Unidades Lotéricas. Neste caso poderá ser cobrada uma Tarifa de Serviço adicional de até 35% do valor da cota.

Os sorteios da Mega-Sena são realizados duas vezes por semana, às quartas e aos sábados. A aposta mínima, de 6 números, custa R$ 2,50. Quanto mais números marcar, maior o preço da aposta e maiores as chances de faturar o prêmio mais cobiçado do país.

O prêmio bruto corresponde a 46% da arrecadação, já computado o adicional destinado ao Ministério do Esporte. Dessa porcentagem:

- 35% são distribuídos entre os acertadores dos 6 números sorteados (Sena);
- 19% entre os acertadores de 5 números (Quina);
- 19% entre os acertadores de 4 números (Quadra);

- 22% ficam acumulados e distribuídos aos acertadores dos 6 números nos concursos de final 0 ou 5.

- 5% ficam acumulado para a primeira faixa - sena - do último concurso do ano de final zero ou 5.

Não havendo acertador em qualquer faixa, o valor acumula para o concurso seguinte, na respectiva faixa de premiação. Não deixe de conferir o seu bilhete de aposta.

Os prêmios prescrevem 90 dias após a data do sorteio. Após esse prazo, os valores são repassados ao tesouro nacional para aplicação no FIES - Fundo de Financiamento ao Estudante do Ensino Superior.

Mega da Virada - Concurso Especial de Fim de Ano da Mega-Sena.

O último concurso da Mega-Sena de final 0 ou 5 de cada ano civil, que tem a denominação comercial MEGA DA VIRADA e obedece as seguintes regras:

Prazo de comercialização:

Durante os meses de novembro e dezembro com captação de apostas independente e concomitante com os demais concursos da modalidade, utilizando-se de volantes específicos (a CAIXA informará com antecedência a data do início das vendas e o número do concurso da MEGA DA VIRADA que será sorteado no dia 31/12).

Distribuição do valor destinado ao pagamento dos prêmios:

- 62% - primeira faixa - seis acertos (sena);

- 19% - segunda faixa - cinco acertos (quina);

- 19% - terceira faixa - quatro acertos (quadra).

Composição da primeira faixa de premiação (sena):

- 62% do percentual destinado a prêmios, de acordo com a arrecadação do respectivo concurso;

- O total acumulado para o último concurso de final zero ou cinco do ano civil;

- O total acumulado para o concurso de final zero ou cinco;

- O total acumulado na primeira faixa (sena) do concurso anterior, quando houver.

Critério de acumulação:

- Não existindo apostas premiadas com seis números (sena), o prêmio será rateado entre os acertadores de cinco números (quina);

- Não existindo apostas premiadas com seis e cinco números, o prêmio será rateado entre os acertadores de quatro números (quadra);

- Não existindo apostas premiadas em quaisquer faixas de premiação, os valores acumulam para o concurso seguinte, nas respectivas faixas.

Distribuição de arrecadação

Quem joga na Mega-Sena tem milhões de motivos para apostar e milhões de brasileiros para ajudar. Parte do valor arrecadado com as apostas é repassada ao Governo, que pode, então, realizar investimentos nas áreas da saúde, educação, segurança, cultura e do esporte, beneficiando toda a população. Portanto, podemos encarar os jogos da loteria Caixa como um “imposto voluntário”, pois estamos contribuindo para as despesas dos serviços públicos em prol da sociedade brasileira.

Distribuição de Arrecadação	
Prêmio Total	**51,00%**
Fundo Nacional da Cultura	3,00%
Comitê Olímpico Brasileiro	1,70%
Comitê Paraolímpico Brasileiro	0,30%
Prêmio Bruto	46%
Imposto de Renda Federal	13,80%
Prêmio Líquido	32,20%
Seguridade Social	**18,10%**
FIES -Crédito Educativo	**7,76%**
Fundo Penitenciário Nacional	**3,14%**
Desp. de Custeio e Manut. de Serviços	**20,00%**
Tarifa de Administração	10,00%
Comissão dos Lotéricos	9,00%
FDL - Fundo Desenv. das Loterias	1,00%
Renda Bruta	**100,00%**
Adicional p/ Sec. Nacional de Esportes	**4,50%**
Arrecadação Total	**104,50%**

Figura 2. Distribuição de arrecadação
Fonte: WWW.caixa.gov.br/loterias

6.Regras da Lotofácil: como apostar ?

Quando acessamos o site WWW.caixa.gov.br/loterias temos o seguinte texto disponibilizado para entendermos como deverão ser feitas as apostas, as regras e percentuais de prêmios

A **Lotofácil** é a loteria certa para você que gosta de apostar e, principalmente, ganhar. Você pode marcar **de 15 a 18 números**, entre os 25 disponíveis no volante ou deixar que o sistema escolha os números para você (Surpresinha). Além disso, você também pode concorrer com a mesma aposta por 3, 6, 9 ou 12 concursos consecutivos (Teimosinha).

O Bolão CAIXA é a possibilidade que o apostador tem de realizar apostas e dividir com seus amigos ou familiares em várias cotas/frações, bastando preencher o campo próprio no volante ou solicitar diretamente ao atendente da lotérica. Tudo com muita segurança e garantia de recebimento do prêmio, no caso de aposta premiada.

No caso da Lotofácil, os bolões têm preço mínimo de R$ 24,00, cada cota não pode ser inferior a R$ 2,50, sendo possível realizar um bolão no mínimo 2 e no máximo 12 cotas (para apostas compostas por 16 números) ou mínimo de 2 e máximo de 25 (para apostas compostas por 17 ou 18 números).

Você também pode comprar cotas de bolões organizados pelas Unidades Lotéricas. Neste caso poderá ser cobrada uma Tarifa de Serviço adicional de até 35% do valor da cota.

A aposta mínima, de 15 números, custa R$ 1,50. Quanto mais números marcar, maior o preço da aposta e maiores as chances de ganhar. Fatura o prêmio se acertar 11, 12, 13, 14 ou 15 números. São muitas chances de ganhar. Os sorteios são realizados as **segundas, quartas** e **sextas-feiras** sempre às **20h**.

O prêmio bruto corresponde a 46% da arrecadação, já computado o adicional destinado ao Ministério do Esporte. Dessa porcentagem, será deduzido o pagamento dos prêmios com valores fixos:

- R$ 3,00 para as apostas com 11 prognósticos certos entre os 15 sorteados;
- R$ 6,00 para as apostas com 12 prognósticos certos entre os 15 sorteados;
- R$ 15,00 para as apostas com 13 prognósticos certos entre os 15 sorteados.

Somente após a apuração dos ganhadores dos prêmios com valores fixos, o valor restante do total destinado à premiação será distribuído para as demais faixas de prêmios nos seguintes porcentuais:

- 65% entre os acertadores de 15 números;

- 20% entre os acertadores de 14 números entre os 15 sorteados.
- 15% ficamos acumulados para a primeira faixa - 15 acertos - do concurso especial realizado em setembro de cada ano.

Não havendo ganhador em qualquer faixa de premiação, o valor acumula para o concurso seguinte, na faixa de prêmio com 15 acertos. Não deixe de conferir o seu bilhete de aposta.

Os prêmios prescrevem 90 dias após a data do sorteio. Após esse prazo, os valores são repassados ao tesouro nacional para aplicação no FIES - Fundo de Financiamento ao Estudante do Ensino Superior.

Apostas múltiplas

- Caso o apostador tenha optado por efetuar aposta múltipla, de 16 a 18 prognósticos em um único recibo de apostas, a premiação se dá de forma proporcional à quantidade de apostas vencedoras, conforme tabela a seguir:

Apostas		Acertando													
Quant. n° jogados	Quant. apostas	15 números				14 números				13 números			12 números		11 números
		15	14	13	12	14	13	12	11	13	12	11	12	11	11
15	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1
16	16	1	15	0	0	2	14	0	0	3	13	0	4	12	5
17	136	1	30	105	0	3	42	91	0	6	52	78	10	60	15
18	816	1	45	315	455	4	84	364	364	10	130	390	20	180	35

Fonte: WWW.caixa.gov.br

Podemos encontrar uma fórmula que permite fazer os cálculos da tabela, acima.

$$N_{combinações\ com\ x\ acertos} = \binom{a}{x} \cdot \binom{d-a}{15-a}; onde: d = n^{o}\ de\ dezenas\ apostadas;$$

$$a = acertos \ ; \ \ x = \{14,13,12,11\}$$

Concurso Especial

O concurso Especial realizado em setembro da cada ano civil, que tem a denominação comercial: LOTOFÁCIL DA INDEPENDÊNCIA e obedece as seguintes regras:

- Prazo de comercialização:

Durante 30 dias com captação de apostas independente e concomitante com os demais concursos da modalidade utilizando-se de volantes específicos (a CAIXA informará com antecedência a data do início das vendas e o número do concurso Especial).

- Distribuição do valor destinado ao pagamento dos prêmios com valores variáveis (após dedução das faixas de prêmios fixos):

- 80% - primeira faixa - quinze acertos.

20% - segunda faixa - quatorze acertos.

- Composição da primeira faixa de premiação (quinze acertos):

- 80% do percentual destinado a prêmios, de acordo com a arrecadação do respectivo concurso;

- O total acumulado para o concurso Especial;

O total acumulado do concurso anterior, quando houver.

- Critério de acumulação:

- Não existindo apostas premiadas com quinze números, o prêmio será rateado entre os acertadores de quatorze números;

- Não existindo apostas premiadas com quinze e quatorze números, o prêmio será rateado entre os acertadores de treze números e assim sucessivamente, até a 5ª faixa de premiação;

- Não existindo apostas premiadas em quaisquer faixas de premiação, os valores acumulam para o concurso seguinte, na primeira faixa de premiação (15 acertos).

Probabilidades e distribuição da arrecadação

Probabilidades

A probabilidade de ganhar na LOTOFÁCIL é a seguinte:

A PROBABILIDADE DE GANHAR NA LOTOFÁCIL É A SEGUINTE

Faixas de premiação	Apostas simples			
	15 números (1 aposta) Probabilidade - N. de ganhadores - 1 em:	16 números (16 apostas) Probabilidade - N. de ganhadores - 1 em:	17 números (136 apostas) Probabilidade - N. de ganhadores - 1 em:	18 números (816 apostas) Probabilidade - N. de ganhadores - 1 em:
15 acertos	3.268.760	204.297	24.035	4.005
14	21.791	3.026	600	152
13	691	162	49	18
12	59	21	9,4	5
11	11	5,9	3,7	2,9
Preço a pagar	1 x R$1,50 = R$1,50	16 x R$1,50 = R$24,00	136 x R$1,50 = R$204,00	816 x R$1,50 = R$1.224,00

Fonte: WWW.caixa.gov.br

Distribuição de Arrecadação

Com a Lotofácil, ajudar o Brasil é tão fácil quanto ganhar. Quando você aposta na Lotofácil, uma porcentagem do total arrecadado é repassada ao Governo e, assim, milhões de brasileiros são beneficiados nas áreas da saúde, educação, segurança, cultura e do esporte.

Distribuição de Arrecadação	
Prêmio Total	**51,00%**
Fundo Nacional da Cultura	3,00%
Comitê Olímpico Brasileiro	1,70%
Comitê Paraolímpico Brasileiro	0,30%

Prêmio Bruto	46%
Imposto de Renda Federal	13,80%
Prêmio Líquido	32,20%
Seguridade Social	**18,10%**
FIES -Crédito Educativo	**7,76%**
Fundo Penitenciário Nacional	**3,14%**
Desp. de Custeio e Manut. de Serviços	**20,00%**
Tarifa de Administração	10,00%
Comissão dos Lotéricos	9,00%
FDL - Fundo Desenv. das Loterias	1,00%
Renda Bruta	**100,00%**
Adicional p/ Sec. Nacional de Esportes	**4,50%**
Arrecadação Total	**104,50%**

7. Introdução à Análise Combinatória e Probabilidade

7.1 Princípio fundamental da contagem

Se um experimento é composto por n fases sucessivas e independentes, tal que:

$$p_1 = o\ número\ de\ possibilidades\ da\ primeira\ fase;$$

$$p_2 = o\ \text{número}\ de\ possibilidades\ da\ seggunda\ fase;$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$p_n = o\ \text{número}\ de\ possibilidades\ da\ n - esima\ fase, \text{então}\ podemos\ enunciar:$$

O princípio fundamental da contagem: o número de possibilidades de um acontecimento se realizar é calculado por:

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot\ p_n$$

7.2 Fatorial

Seja n um número inteiro maior que 1, define-se o fatorial de n como sendo o produto dos n números naturais consecutivos de n a 1. Indicando-se por: n!(n fatorial ou fatorial de n).

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1\ ,\ \ com\ \ n \in \mathbb{N}\ e\ n > 1$$

Exemplo: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Podemos escrever para qualquer $n \in \mathbb{N}\ \ e\ n > 2$:

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

E, temos:

$$1! = 1 \qquad e \qquad 0! = 1$$

7.3 Arranjo simples

Define-se arranjo simples dos n elementos de um espaço E, tomados p a p, como sendo toda sequência de p elementos distintos de E.

Em Símbolos:

$$A_{n,p} = A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}(\text{número}\ de\ arrnjos\ simples\ de\ elementos\ tomados\ p\ a\ p).$$

7.4 Permutação simples

Considere um conjunto E com n elementos:

Define-se permutação simples dos n elementos, qualquer agrupamento de n elementos distintos do conjunto E.

Em símbolos:

$$p_n = A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} \Rightarrow p_n = n!$$

As permutações simples de n elementos distintos diferem entre si apenas pela ordem dos elementos.

7.5 Permutação com elementos repetidos

Consideremos a palavra ARARUNA.

Se todas as letras fossem distintas, teríamos:
$p_5 = 7! = 5.040\ permutações.$

Mas devemos dividir 7! Pelo número de permutações das letras A,A,A, pois elas não são distintas entre si. E também dividir pelo número de permutações das letras R, R . Ou seja,

$$p_7^{(3,2)} = \frac{7!}{3!\cdot 2!} = \frac{5.040}{6\cdot 2} = \frac{5.040}{12} = 420\ permutações\ da\ palavra\ ARARUNA.$$

Caso geral: sendo n elementos, onde $n_1, n_2, \ldots, n_p$, com todos iguais entre si, o número de permutações que podemos obter é calculado por:

$$p_n^{(n_1,n_2,\ldots,n_p)} = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot \ldots \cdot n_p!}$$

7.6 Combinação simples

Sendo n elementos diferentes, define-se como combinação simples desses n elementos, tomados p a p, qualquer agrupamento de p elementos escolhidos entre o n elementos considerados, e diferem entre si pela natureza de seus elementos.

Em símbolos, temos:

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$$

7.7 Número binomial

O número total de combinações simples de n elementos, p a p, pode ser representado pelo número binomial $\binom{n}{p}$.

Ou seja, $C_{n,p} = \binom{n}{p}, com\ \ n \geq p \geq 0$ (Lê-se: binomial de n sobre p)

Onde n é o numerador e p o denominador do número binomial.

7.8 Experimentos aleatórios

Denomina-se experimento aleatório todo experimento que quando repetimos nas mesmas condições podem apresentar resultados distintos.

Exemplos:

- Lançamento de uma moeda;
- Lançamento de dados;
- Extração de bolas de uma urna;
- Sorteio das dezenas da mega-sena.

7.9 Espaço amostral

Denomina-se espaço amostral ao conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

Por exemplo, no lançamento de um dado com suas faces numeradas de 1 a 6, temos o espaço amostral $S = \{1,2,3,4,5,6\}$, logo, o números de elementos do espaço amostra é, $n(S) = 6$.

7.10 Evento

Denomina-se evento a qualquer subconjunto do espaço amostral. Por exemplo, ao escolhermos aleatoriamente um a das seis faces de um dado, temos o seguinte espaço amostra $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ e um exemplo de um evento deste espaço amostral é: “ocorrência de um número primo”.Indicando por E esse evento, temos:

$$E = \{2,3,5\}$$

E indicamos o número de elementos desse evento por $n(E) = 3$.

7.11 Combinação de eventos

Usando certas operações entre conjuntos, podemos combinar conjuntos para formar novos conjuntos, ou seja, novos eventos.

7.11.1 União de dois eventos

Consideremos dois eventos A e B; então $A \cup B$ será também um evento que ocorrerá se, e somente se, A ou B(ou ambos) ocorreram. Sendo assim, dizemos que $A \cup B$ é a união entre o evento A e o evento B.

7.11.2 Intersecção de dois eventos

Sendo A e B dois eventos; então $A \cap B$ será também um evento que ocorrerá se, somente se, A e B ocorrerem simultaneamente.Portanto, $A \cap B$ é a intersecção entre o evento A e o evento B.

E se $A \cap B = \emptyset$, A e B são mutuamente exclusivos.

7.11.3 Complementar de um evento

Sendo A um evento; então A^C será também um evento que ocorrerá se, e somente se, A não ocorrer. Portanto, A^C é o evento complementar de A.

5.11.4 União de n eventos

Sendo $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ uma sequência de eventos.Então

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

Será também um evento que ocorrerá se, e somente se, ao menos um dos eventos A_j $ocorrer$.

5.11.5 Intersecção de n eventos

Sendo $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ uma sequência de eventos.Então

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

Será também um evento que ocorrerá se, e somente se, todos os eventos A_j ocorrerem simultaneamente.

7.12 Definição de probabilidade

Define-se como probabilidade de um evento ocorrer como sendo o quociente entre o número de eventos favoráveis, $n(E)$, e o número de eventos possíveis, $n(S)$.

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

Observação:

Caso $E = \emptyset$, então $P(E) = 0$ $e\ se\ E = S, temos, P(E) = 1. Portanto, 0 \leq P(E) \leq 1$

5.13 Probabilidade de um evento em um espaço amostral finito.

Considere a seguinte situação:

No lançamento de um dado, qual é a probabilidade de sair um número primo?

Temos o espaço amostral: $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

Evento E: sair número primo = 2,3,5.

Portanto, a probabilidade de sair { 2,3,5} é:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

5.14 Probabilidade com união e intersecção de eventos

Sejam dois eventos A e B de um espaço amostral S.

Da teoria dos conjuntos temos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Dividindo os dois membros dessa igualdade acima por $n(S)$, obtemos:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Em resumo:

A probabilidade da união de dois eventos A e B é igual à soma das probabilidades desses eventos, menos a probabilidade da intersecção de A com B.

Por conseqüência obtemos:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

7.15 Probabilidade condicional

Sendo S um espaço amostral e consideremos dois eventos, A e B. Com o símbolo $P(A|B)$ indicamos a probabilidade do evento A ocorrer, dado que o evento B tenha ocorrido, ou seja, $P(A|B)$ é a probabilidade condicional do evento A,uma vez que B tenha ocorrido.Em símbolos temos:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

7.16 Eventos independentes

Sejam A e B dois eventos de um espaço amostral S, dizemos que A é independente de B se:

$$P(A|B) = P(A)$$

Isto é, A independe de B se a ocorrência de B na afeta a probabilidade de A.

Observe que e, se A independe de B, então independe de A, pois:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)} = \frac{P(B) \cdot P(A)}{P(A)} = P(B)$$

7.17.Lei binomial da probabilidade

Consideremos um experimento que consiste em uma sequência de ensaios ou tentativas independentes, isto é, ensaios nos quais a probabilidade de um resultado em cada ensaio não depende dos resultados ocorridos nos ensaios anteriores, nem dos resultados nos ensaios posteriores. Em cada ensaio, podem ocorrer apenas dois resultados, um deles eu chamaremos de sucesso (S) e outro que chamaremos de fracasso (F). A probabilidade de ocorrer sucesso em cada ensaio é sempre p, e consequentemente, a de fracasso é $q = 1 - p$. Estes tipos de experimentos aleatórios recebem o nome de ensaios de Bernoulli.

Distribuição binomial

Consideremos então uma sequência de n ensaios de Bernoulli. Seja p a probabilidade de sucesso em cada ensaio e q a probabilidade de fracasso.k sucessos, nos n ensaios. Sendo que $k \in \{0,1,2,3, \dots, n\}$.

Queremos calcular a probabilidade P_k , da ocorrência de exatamente

Sejam os eventos:

E_i: ocorre sucesso no i-ésimo ensaio, $P(E) = p$.

E_i^c: ocorre fracasso no i-ésimo ensaio, $P\left(E_i^C\right) = q$.

O evento "ocorrerem exatamente k sucessos nos n ensaios" é formado por todas as enuplas ordenadas em que existem k sucessos (S) e $(n-k)$ fracassos (F). O número de enuplas ordenadas nessas condições é:

$$P_n^{k,n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

A probabilidade de cada enupla ordenada de k sucessos e $(n-k)$ fracassos é dada por:

$$\underbrace{p \cdot p \cdot \cdots \cdot p}_{k\ vezes} \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot \cdots \cdot q}_{(n-k)\ vezes} = p^k \cdot q^{n-k}$$

Pois qualquer enupla ordenada deste tipo é a intersecção de k eventos do tipo E_i e $(n-k)$ eventos do tipo E_j^C, e, como esses eventos são independentes, a probabilidade da intersecção dos mesmos é o produto das probabilidades de cada um, isto é, $p^k \cdot q^{n-k}$ .Por exemplo, a enupla $\underbrace{(S,S,S,\ldots,S)}_{k}\ \underbrace{(F,F,F,\ldots,F)}_{n-k}$ é igual à intersecção

$$E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_k \cap E_{k+1}^C \cap \cdots \cap E_n^C$$

Cuja probabilidade é $p^k \cdot q^{n-k}$.

Logo, se cada enupla ordenada com exatamente k sucessos tem probabilidade $p^k \cdot q^{n-k}$ e existem $\binom{n}{k}$ enuplas desse tipo, a probabilidade P_k de exatamente k sucessos nos n ensaios será:

$$P_k = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

8. Probabilidades na Mega-Sena

A mega-sena é uma das modalidades de jogo das loterias caixas que o apostador deve escolher, no mínimo,6 números e ,no máximo 15 números de um conjunto de 60 números numerados de 1 a 60. São retirados, de forma aleatória, um número de cada vez de um globo contendo as 60 bolinhas numeradas de 1 a 60. Existem três faixas de premiação, a sena (acertos de 6 números), a quina(acerto de

5 números) e a quadra(acerto de 4 números). Mas, qual é a probabilidade de um apostador acertar a sena fazendo a aposta mínima de 6 dezenas?

Para calcularmos esta probabilidade devemos usar o princípio multiplicativo entre o número de combinações que apostamos e o número de combinações que não apostamos e aí teremos o número de combinações favoráveis ao nosso evento(a sena), depois é só dividir pelo número total de combinações de seis dezenas possíveis.Veja:

$$P(6) = \frac{\binom{6}{6}\cdot\binom{60-6}{6-6}}{\binom{60}{6}} = \frac{1\cdot\binom{54}{0}}{\binom{60}{6}} = \frac{1\cdot 1}{\binom{60}{6}} = \frac{1}{\binom{60}{6}} = \frac{1}{\frac{60!}{6!\cdot(60-6)!}} = \frac{1}{\frac{60!}{6!\cdot 54!}} = \frac{6!\cdot 54!}{60!} =$$

$$= \frac{1}{50.063.860}$$

A probabilidade de acertar a quina se calcula com o mesmo raciocínio:

$$P(5) = \frac{\binom{6}{5}\cdot\binom{60-6}{6-5}}{\binom{60}{6}} = \frac{\binom{6}{5}\cdot\binom{54}{1}}{\binom{60}{6}} = \frac{6\cdot 54}{50.063.860} = \frac{324}{50.063.860} \approx \frac{1}{154.518}$$

A probabilidade de acertar a quadra é:

$$P(4) = \frac{\binom{6}{4}\cdot\binom{60-6}{6-4}}{\binom{60}{6}} = \frac{\binom{6}{4}\cdot\binom{54}{2}}{\binom{60}{6}} = \frac{15\cdot 1.431}{50.063.860} = \frac{21.465}{50.063.860} \approx \frac{1}{2.332}$$

Podemos generalizar esta fórmula para qualquer quantidade de dezenas apostadas e a para a quantidade de acertos desejados. Veja;

$$P(E) = \frac{\binom{D}{E}\cdot\binom{60-D}{6-E}}{\binom{60}{6}} = \frac{\binom{D}{E}\cdot\binom{60-D}{6-E}}{50.063.860}$$

Onde: $E = evento\ desejado$; $D = n^o\ de\ dezenas\ apostadas.$

8.1 Entendendo as tabelas de preços e prêmios a receber

Entendendo a tabela de preços das apostas da Mega-Sena

No site das Loterias CAIXA, Mega-Sena, existe a seguinte tabela de preços das apostas em função da quantidade de números marcados:

Quantidade de nº jogados	Valor da aposta (R$)

6	2,50
7	17,50
8	70,00
9	210,00
10	525,00
11	1.155,00
12	2.310,00
13	4.290,00
14	7.507,50
15	12.512,50

Fonte: tabela elaborada pelo autor.

Como se justifica os valores na segunda coluna?

Bem, sabemos que a aposta mínima é de 6 números e custa R$2,50.Agora ,se jogarmos 7 números podemos formas quantas combinações distintas de seis números?A resposta é:

$$\binom{7}{6} = \frac{7!}{6!\,(7-6)!} = \frac{7 \cdot 6!}{6! \cdot 1!} = 7\ combinações\ de\ seis\ números\ distintos$$

Como cada aposta simples de seis números custa R$2,50; então sete combinações custará :

$$7 \cdot R\$2{,}50 = R\$17{,}50$$

Portanto, os valores da segunda coluna se justificam pelo seguinte:

Quantidade de números jogados	Valor da aposta (R$)
6	2,50
7	$17{,}50 = \binom{7}{6} \cdot 2{,}5 = 7 \cdot 2{,}5 = 17{,}50$
8	$70{,}00 = \binom{8}{6} \cdot 2{,}5 = 28 \cdot 2{,}5 = 70{,}00$
9	$210{,}00 = \binom{9}{6} \cdot 2{,}5 = 84 \cdot 2{,}5 = 210{,}00$
10	$525{,}00 = \binom{10}{6} \cdot 2{,}5 = 210 \cdot 2{,}5 = 525{,}00$
11	$1.155{,}00 = \binom{11}{6} \cdot 2{,}5 = 462 \cdot 2{,}5 = 1.155{,}00$
12	$2.310{,}00 = \binom{12}{6} \cdot 2{,}5 = 924 \cdot 2{,}5 = 2.310{,}00$
13	$4.290{,}00 = \binom{13}{6} \cdot 2{,}5 = 1.716 \cdot 2{,}5 = 4.290{,}00$
14	7.507,50 *7.507,50*=$\binom{14}{6} \cdot 2{,}5 = 3.003 \cdot 2{,}5 = 7.507{,}50$

15	12.512,50 $12.512{,}50 = \binom{15}{6} \cdot 2{,}5 = 5.005 \cdot 2{,}5 = 12.512{,}50$

Fonte: tabela elaborada pelo autor.

Entendo a tabela de prêmios a receber na Mega-Sena

No site das Loterias CAIXA, Mega-Sena, existe a seguinte tabela de prêmios a receber em função da quantidade de números acertados:

Prêmios a receber

Quantidade de prêmios a receber acertando:						
Apostas	6 números			5 números		4 números
Quantidade de nº jogados	Sena	Quina	Quadra	Quina	Quadra	Quadra
6	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**
7	**1**	**6**	**0**	**2**	**5**	**3**
8	**1**	**12**	**15**	**3**	**15**	**6**
9	**1**	**18**	**45**	**4**	**30**	**10**
10	**1**	**24**	**90**	**5**	**50**	**15**
11	**1**	**30**	**150**	**6**	**75**	**21**
12	**1**	**36**	**225**	**7**	**105**	**28**
13	**1**	**42**	**315**	**8**	**140**	**36**
14	**1**	**48**	**420**	**9**	**180**	**45**
15	**1**	**54**	**540**	**10**	**225**	**55**

Quais são os cálculos que justifica esta tabela de prêmios?

A Mega-Sena paga uma vez pela quadra que tenha acertado dentro de seis dezenas apostadas.E uma vez pela quina que tenha acertado dentro das seis dezenas.

Mas, quantas quadras a Mega-Sena paga quando se aposta um cartão com sete dezenas marcadas pagando R$17,50 ?

Bem, com 7 dezenas marcadas podemos fazer exatamente,$C_{7;6} = \frac{7!}{6!(7-6)!} = \frac{7!}{6!1!} = \frac{7 \cdot 6!}{6!} = 7\ combinações\ diferentes$

Vamos supor que escolhamos as seguintes dezenas:01-02-03-04-05-06-07.

As sete combinações possíveis são:

01-02-03-04-05-06

01-02-03-04-05-07

01-02-03-04-07-06

01-02-03-07-05-06

01-02-07-04-05-06

01-07-03-04-05-06

07-02-03-04-05-06

Por exemplo, se acertarmos a quadra composta pelas dezenas, 01-02-03-04, teremos três combinações de seis dezenas premiadas com a quadra, que são as seguintes:

01-02-03-04-05-06 $\rightarrow premiada$

01-02-03-04-05-07 $\rightarrow premiada$

01-02-03-04-07-06 $\rightarrow premiada$

Isto se explica pelo fato que, ao apostarmos sete dezenas e acertarmos quatro das sete dezenas, sobra-se três dezenas para formar uma combinação de seis dezenas com as quatro dezenas que acertamos.Portanto,teremos três combinações diferentes de seis dezenas com a mesma quadra.

Em termos combinatórios podemos combinar três dezenas em $C_{3;2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3 \cdot 2!}{2!1!} = 3$ grupos de duas dezenas distintas

Raciocínio semelhante usa-se no cálculo da quantidade de quinas que a Mega-Sena paga caso acertarmos cinco dezenas. Veja: Supondo que tenhamos acertado cinco dezenas das sete dezenas que apostamos acima. Por exemplo, as dezenas: 01-02-03-04-05.

Logo, teremos as seguintes combinações de seis dezenas distintas premiadas com a quina:

$$\left.\begin{array}{l} 01-02-03-04-05-06 \\ 01-02-03-04-05-07 \end{array}\right\} \rightarrow Premiadas\ com\ a\ quina$$

sto se explica pelo fato que, ao apostarmos sete dezenas e acertarmos cinco, sobra-se duas dezenas para formar uma combinação de seis dezenas distintas com a quina que acertamos.

Portanto, teremos duas combinações distintas premiadas com a quina.

Em termos combinatórios temos,

$$C_{2;1} = \frac{2!}{1!\,(2-1)!} = \frac{2 \cdot 1!}{1!\,1!} = 2\ grupos\ de\ duas\ dezenas\ distintas$$

Genericamente, temos o seguinte: quando apostamos d dezenas, no caso de acertarmos faixa de premiação da quadra, ganharemos a seguinte quantidade de quadras; d-4 tomados 2 a 2 quadras.No caso de acertarmos a fixa de premiação da quina ganharemos ; d-5 tomado 1 a 1 quinas.

Podemos generalizar estes cálculos pela seguinte fórmula:

$$N_a = \binom{d-a}{6-a}; onde\colon N_a = n^o\ de\ combinações\ com\ "a"\ acertos$$

$$d = n^o\ de\ dezenas\ apostadas$$

Nos dois exemplos acima, temos para a aposta de sete dezenas: $N_4 = n^o\ de\ combinações\ com\ 4\ acertos\ \ e\ ; d = 7$. Substituindo na fórmula acima obtemos;

$$N_4 = \binom{7-4}{6-4} = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = \frac{3!}{2!\,1!} = \frac{3 \cdot 2!}{2!\,1!}$$
$$= 3\ combinações\ com\ uma\ quadra\ premiada$$

$$N_5 = \binom{7-5}{6-5} = \binom{2}{1} = \frac{2!}{1!\,(2-1)!} = \frac{2!}{1!\,1!} = \frac{2!}{1!\,1!}$$
$$= 2\ combinações\ com\ uma\ quina\ premiada, cada.$$

É com estes raciocínios que se calcula os números apresentados na quinta e sétima coluna (da esquerda para direita) da tabela de prêmios a receber.

Com a mesma quantidade de dezena nos exemplos acima, 7 dezenas.Se acertarmos cinco dezenas,quantas quadras acertaremos?

Bem, com as cinco dezenas que acertamos podemos formar, $C_{5;4} = \frac{5!}{4!(5-4)!} = \frac{5 \cdot 4!}{4!1!} = 5\, quadras$,que se combinará com as duas dezenas que sobraram das sete dezenas apostadas,para formar a combinação das seis dezenas sorteadas.Ou seja, $C_{5;4} \cdot C_{2;2} = 5 \cdot 1 = 5\, quadras\ distintas$.No caso de apostarmos 8 dezenas e se acertarmos cinco dezenas ,acertaremos também, $C_{5;4} \cdot C_{4;2} = 5 \cdot 6 = 30\, quadras\ distintas$.

Podemos encontrar uma fórmula eu generalize estes cálculos acima.

$$N_{combinações\ com\ x\ acertos} = \binom{a}{x} \cdot \binom{d-a}{6-a}; onde: d = n^o\ de\ dezenas\ apostadas;$$

$$a = acertos\ ;\ x = \{4,5\}$$

Por exemplo, se apostarmos 9 dezenas e acertarmos 5 dezenas.Quantas quadras acertaremos?Usando a fórmula acima , obtemos;

$N_{combinações\ com\ 4\ acertos} = \binom{5}{4} \cdot \binom{9-5}{6-4} = 5 \cdot 6 = 30$ combinações com uma quadra premiada, cada.

E no caso de acertarmos seis dezenas das nove apostadas. Quantas quinas acertaremos?

$N_{combinações\ com\ 5\ acertos} = \binom{6}{5} \cdot \binom{9-6}{6-5} = 6 \cdot 3 = 18$ combinações com uma quina premiada, cada.

E quantas quadras?

$N_{combinações\ com\ 4\ acertos} = \binom{6}{4} \cdot \binom{9-6}{6-4} = 15 \cdot 3 = 45 = 45$ combinações com uma quadra premiada , cada.

8.2 Probabilidades da Lotofácil

A Lotofácil é uma das dez loterias que a Caixa Econômica Federal administra e segundo a própria Caixa, é a segunda loteria mais procurada pelos apostadores perdendo apenas para a Mega-Sena.

Para apostarmos na Lotofácil devemos escolher e marcar em um bilhete igual ao da figura 3, no mínimo, 15 números em um rol de 25 números de 1 a 25 e, no máximo, 18 números. Esta loteria tem cinco faixas de premiação, três faixas com prêmios fixos, a saber: 11 números acertados que equivale à premiação de R$3,00, 12 números acertados que equivale à premiação de R$6,00 e 13 números acertados equivalente à premiação de R$15,00. As outras duas faixas, 14 números e 15 números, têm premiação equivalente à 65% e 20% de 46% da arrecadação, respectivamente. Variando em função da quantidade de acertadores.

Figura 3:bilhete de aposta da Lotofácil 1

Fonte: Casa loteria Arca da Sorte

Veja abaixo a fórmula que permite calcular as probabilidades das cinco faixas de premiação em função da quantidade de números apostados.

$$P(E) = \frac{\binom{D}{E} \cdot \binom{25-D}{15-E}}{\binom{25}{15}} = \frac{\binom{D}{E} \cdot \binom{25-D}{15-E}}{3.268.760}$$

Onde: $E = evento\ desejado;$ $\qquad D = n^{o}\ de\ dezenas\ apostadas$

Vamos usar a fórmula acima para calcularmos as probabilidades das cinco faixas de premiação fazendo-se a aposta mínima.

- Probabilidade de acertarmos a faixa principal, 15 números:

$$P(15) = \frac{\binom{15}{15} \cdot \binom{25-15}{15-15}}{\binom{25}{15}} = \frac{\binom{15}{15} \cdot \binom{25-15}{15-15}}{3.268.760} = \frac{1}{3.268.760}$$

- Probabilidade de acertarmos 14 números:

$$P(14) = \frac{\binom{15}{14} \cdot \binom{25-15}{15-14}}{3.268.760} = \frac{15 \cdot 10}{3.268.760} = \frac{150}{3.268.760} \approx \frac{1}{21.792}$$

- Probabilidade de acertarmos 13 números:

$$P(13) = \frac{\binom{15}{13} \cdot \binom{25-15}{15-13}}{3.268.760} = \frac{105 \cdot 45}{3.268.760} = \frac{4.725}{3.268.760} \approx \frac{1}{692}$$

- Probabilidade de acertar 12 números:

$$P(12) = \frac{\binom{15}{12} \cdot \binom{25-15}{15-12}}{3.268.760} = \frac{54.600}{3.268.760} \approx \frac{1}{60}$$

- Probabilidade de acertar 11 números:

$$P(11) = \frac{\binom{15}{11} \cdot \binom{25-15}{15-11}}{3.268.760} = \frac{286.650}{3.268.760} \approx \frac{1}{11}$$

9. PROPOSTA DIDÁTICA DE ENSINO DE PROBABILIDADE

Os dois jogos didáticos, de minha autoria, serão apresentados, abaixo, como uma proposta pedagógica de ensino de probabilidade contextualizado nos jogos da Loteria Caixa Econômica Federal, Mega-Sena e Lotofácil. Entretanto, esses dois jogos foram testados com os alunos do 2º ano de Ensino Médio, na Escola

Estadual Benjamin Gomes Maranhão-Araruna-PB, como atividade de Estágio Supervisionado IV.

O jogo:mega-sena didática

Material utilizado:

- Glóbulo de bingo com 60 bolas numeradas de 1 a 60 com custo de 3.000 centavos;
- 760 bilhetes da mega-sena;
- Software gerador de números mega sena v.1275;
- Software MegaMania versão 2014.9.00(versão gratuita);
- HTLoto Hyper Tech Software;
- Software gerador de números Lotofácil v.1177;
- Software BingoFácil, verão 2.0;
- Planilha Excel.

Para agilizar os sorteios e conseguir realizar um número maior de sorteio, o professor pode optar em usar os softwares geradores das seis dezenas, acima citados.Mas, caso os alunos reclamem que é melhor utilizar o glóbulo que é mais “honesto”,isto é, eles estão vendo as bolinhas saírem.Ou seja, os alunos podem ser contra o uso dos softwares para realizar os sorteios, alegando que o professor poderia ter programado os software de maneira a poder manipular as dezenas sorteadas.

Objetivos

O objetivo principal, é demonstrar na prática, que o conhecimento de Probabilidade nos permite tomar decisões com grau de risco calculado. No caso em questão o professor pode esperar matematicamente que nenhum aluno acertará a sena durante a realização dos 40 sorteios. É claro que o professor deve explicar que não é impossível algum aluno acertar a sena, mas, que a probabilidade é relativamente pequena, o professor está afirmando que não haverá ganhador da sena, correndo-se um risco máximo,de 15,17%, risco este, que ele decidiu tomar.

Outro objetivo é explorar os cálculos das mais diversas probabilidades existentes na mega-sena, como por exemplo, as probabilidades da sena, quina, quadra; tabela de preços das apostas; tabela de prêmios e prêmios estimados, aproximando o conteúdo matemático teórico para a realidade do aprendiz. Enfim, trabalhar os conteúdos de Análise Combinatória e Probabilidade.

Metodologia

Dinâmica da Mega-Sena Didática

Serão realizados 40 sorteios, 39 sorteios + o sorteio final que não acumulará, ou seja, ganhará aquele aluno que obtiver maior número de acertos, fazendo uma analogia com o sorteio da Mega-Sena da virada, que a Loteria CAIXA realiza todo final de ano.

Primeiramente será aplicada uma prova (diagnóstico de pré-aprendizado) de múltipla escolha com dez questões, referentes aos anos escolares anteriores, sendo cada questão com cinco opções e apenas uma opção correta. Com o propósito de explorar a lei de probabilidade binomial de forma contextualizada e dos alunos ficarem “devendo” pontos. Em cada questão o aluno poderá obter as seguintes pontuações:

- $-1\ ponto\ , caso\ ele\ erre;$
- $1\ ponto, caso\ ele\ acerte$.

Caso o aluno não assinale nenhuma das dez questões, deixando a prova em branco, será atribuída nota -10.

Segundo meus cálculos, em uma turma com 38 alunos que realizem a prova inteira aleatoriamente, será esperado o seguinte resultado:

Nº de alunos	4	10	12	8	3	1	0	0	0	0	0

Pontuação esperada	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10

Veja os cálculos:

Probabilidades do aluno acertar, aleatoriamente, as questões;

$$P(0) = \binom{10}{0} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{10} = \frac{1.048.576}{9.765.625} \approx 10{,}74\%$$

$$P(1) = \binom{10}{1} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^1 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{9} = \frac{2.621.440}{9.765.625} \approx 26{,}84\%$$

$$P(2) = \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{8} = \frac{2.949.120}{9.765.625} \approx 30{,}20\%$$

$$P(3) = \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{7} = \frac{1.966.080}{9.765.625} \approx 20{,}13\%$$

$$P(4) = \binom{10}{4} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{6} = \frac{860.1608}{9.765.625} \approx 8{,}81\%$$

$$P(5) = \binom{10}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{5} = \frac{258.048}{9.765.625} \approx 2{,}64\%$$

$$P(6) = \binom{10}{6} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^6 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{4} = \frac{53.760}{9.765.625} \approx 0{,}55\%$$

$$P(7) = \binom{10}{7} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^7 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{3} = \frac{7.680}{9.765.625} \approx \frac{1}{1.272}$$

$$P(8) = \binom{10}{8} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^8 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{2} = \frac{720}{9.765.625} \approx \frac{1}{13.563}$$

$$P(9) = \binom{10}{9} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^9 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{1} = \frac{40}{9.765.625} \approx \frac{1}{244.141}$$

$$P(0) = \binom{10}{10} \cdot 10 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{0} = \frac{1}{9.765.625}$$

Multiplicando cada probabilidade acima pela quantidade de alunos obtemos a expectativas das quantidades de questões acertadas.

A participação efetiva de cada aluno será atribuído uma pontuação de $0{,}125\ ponto$, sendo assim, o aluno terá a oportunidade de ganhar 5 pontos, caso ele participe dos 40 sorteios.

O aluno que, durante os 40 sorteios, ficar com o melhor saldo, ganhará nota dez.Caso haja empate no saldo,os dez pontos serão divididos pelos alunos empatados,por exemplo,se no final dos 40 sorteios tivermos 3 alunos com o mesmo saldo final ,cada aluno ficará com $\frac{10}{3} = 3,\bar{3}\ pontos$ .O segundo aluno com o melhor saldo receberá 9 pontos e o terceiro aluno receberá 8 pontos.Caso haja empate as pontuações serão divididas entre os alunos empatados.

Veja a expectativa matemática da quantidade de aluno que irá acertar a sena:

$$Número \ \ esperado \ de \ aluno \ premiado \ com \ \ sena = 38 \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{C_{15,6}}{C_{60,6}}\right)^{40}\right)$$

$$= 0{,}15166 \sim 0$$

Desenvolvimento

Será entregue um bilhete, de cada vez, a cada aluno. O aluno poderá fazer a aposta mínima, marcando 6 números em um rol crescente formado pelo conjunto (1,2,3,4,5,...,60) em uma das duas matrizes , $M_{6\times10}$, que cada bilhete contém.Esta aposta mínima custa R$2,50 (no caso, dinheiro simbólico).A aposta máxima permitida é de 15 números marcados ,custando R$12.512,50.Cada aluno só poderá fazer apenas um jogo em cada sorteio , com apostas variando de 6 números a 15 números.Os números marcados pelos alunos serão registrados pelo professor e cada aluno receberá uma “ficha de apostas” para o aluno,juntamente com o professor ,registrarem os valores das apostas,ganhos e saldo.

O professor deve trabalhar com os alunos os cálculos para explicar a seguinte tabela. Veja os valores das apostas:

Valores das apostas da Mega-Sena	
Nº de dezenas	Valor da aposta
6	R$ 2,50
7	R$ 17,50
8	R$ 70,00
9	R$ 210,00
10	R$ 525,00
11	R$ 1.155,00
12	R$ 2.310,00

13	R$ 4.290,00
14	R$ 7.507,50
15	R$ 12.512,50

Fonte: tabela elaborada pelo autor.

Como se justifica os valores na segunda coluna?

Bem, sabemos que a aposta mínima é de 6 números e custa R$2,50.Agora, se jogarmos 7 números podemos formas quantas combinações distintas de seis números?A resposta é:

$$\binom{7}{6} = \frac{7!}{6!\,(7-6)!} = \frac{7 \cdot 6!}{6! \cdot 1!} = 7\ combinações\ de\ seis\ números\ distintos$$

Como cada aposta simples de seis números custa R$2,50 ; então sete combinações custará :

$$7 \cdot R\$2{,}50 = R\$17{,}50$$

Portanto,os valores da segunda coluna se justifica pelo seguinte :

Quantidade de números jogados	Valor da aposta (R$)
6	2,50
7	$17{,}50 = \binom{7}{6} \cdot 2{,}5 = 7 \cdot 2{,}5 = 17{,}50$
8	$70{,}00 = \binom{8}{6} \cdot 2{,}5 = 28 \cdot 2{,}5 = 70{,}00$
9	$210{,}00 = \binom{9}{6} \cdot 2{,}5 = 84 \cdot 2{,}5 = 210{,}00$
10	$525{,}00 = \binom{10}{6} \cdot 2{,}5 = 210 \cdot 2{,}5 = 525{,}00$
11	$1.155{,}00 = \binom{11}{6} \cdot 2{,}5 = 462 \cdot 2{,}5 = 1.155{,}00$
12	$2.310{,}00 = \binom{12}{6} \cdot 2{,}5 = 924 \cdot 2{,}5 = 2.310{,}00$
13	$4.290{,}00 = \binom{13}{6} \cdot 2{,}5 = 1.716 \cdot 2{,}5 = 4.290{,}00$
14	7.507,50 $7.507{,}50 = \binom{14}{6} \cdot 2{,}5 = 3.003 \cdot 2{,}5 = 7.507{,}50$
15	12.512,50 $12.512{,}50 = \binom{15}{6} \cdot 2{,}5 = 5.005 \cdot 2{,}5 = 12.512{,}50$

Fonte: tabela elaborada pelo autor.

Regras de premiação da Mega-Sena Didática

As premiações em cada sorteio serão baseadas nos percentuais de distribuição dos prêmios da Mega-Sena que são os seguintes:
Da arrecadação total, 46% será destinado aos prêmios. O restante, 54%, ficará com a “banca”,no caso ,o professor.Dos 46%; 35% será destinados aos ganhadores da sena;19% aos ganhadores da quina e 19% aos ganhadores da quadra;22% acumulam para os acertadores da sena nos concursos de final zero ou cinco,no caso,os concursos nº: 5,10,15,20,25,30 e 35. E 5% acumulam para o sorteio final de nº 40. A premiação em cada faixa, sena, quina e quadra, será dividida igualmente pelo número de ganhadores.
A premiação inicial será um valor arbitrário escolhido pelo professor da seguinte forma:
Arrecadação total $, 38\ alunos\ \times R\$2{,}50(aposta\ mínima) \times 10\ pontos = R\$950{,}00$.Deste total ,46% $ou\ seja, 0{,}46 \cdot R\$950{,}00 = R\$437{,}00 + 46\%\ da\ arrecadação\ das\ apostas$ será destinado às premiações.Destes $R\$437{,}00$, 35% será destinado à sena,ou seja, $0{,}35 \cdot R\$437{,}00 = R\$152{,}95 + 35\%\ dos\ 46\%\ da\ arrecadação\ das\ apostas$; a quina e quadra receberão 19%,ou seja, $0{,}19 \cdot R\$437{,}00 = R\$83{,}03 + 19\%\ dos\ 46\%\ da\ arrecadação\ das\ apostas$. Os 22%$(0{,}22 \cdot R\$437{,}00 = R\$96{,}14 + 22\%\ dos\ 46\%\ das\ apostas)$ serão destinados ao concurso de nº 5 e os 5%, $(0{,}05 \cdot R\$437{,}00 = 21{,}85 + 5\%\ das\ apostas)$ restantes serão destinados ao concurso de nº 40, sorteio final.
Sendo assim, a “banca” (o professor) começa com saldo inicial de R$-950,00.
O professor deve explorar os cálculos que permite construir a seguinte tabela:

Prêmios a receber

Quantidade de prêmios a receber acertando:						
Apostas	6 números			5 números		4 números
Quantidade de nº jogados	Sena	Quina	Quadra	Quina	Quadra	Quadra
6	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**

7	**1**	**6**	**0**	**2**	**5**	**3**
8	**1**	**12**	**15**	**3**	**15**	**6**
9	**1**	**18**	**45**	**4**	**30**	**10**
10	**1**	**24**	**90**	**5**	**50**	**15**
11	**1**	**30**	**150**	**6**	**75**	**21**
12	**1**	**36**	**225**	**7**	**105**	**28**
13	**1**	**42**	**315**	**8**	**140**	**36**
14	**1**	**48**	**420**	**9**	**180**	**45**
15	**1**	**54**	**540**	**10**	**225**	**55**

Fonte: tabela elaborada pelo autor.

Quais são os cálculos que justificam esta tabela de prêmios a receber?

A Mega-Sena paga uma vez pela quadra que tenha acertado dentro de seis dezenas apostadas.E uma vez pela quina que tenha acertado dentro das seis dezenas.

Mas, quantas quadras a Mega-Sena paga quando se aposta um cartão com sete dezenas marcadas pagando R$17,50 ?

Bem, com 7 dezenas marcadas podemos fazer exatamente,$C_{7;6} = \frac{7!}{6!(7-6)!} = \frac{7!}{6!1!} = \frac{7 \cdot 6!}{6!} = 7\ combinações\ diferentes$

Vamos supor que escolhamos as seguintes dezenas:01-02-03-04-05-06-07.

As sete combinações possíveis são:

01-02-03-04-05-06

01-02-03-04-05-07

01-02-03-04-07-06

01-02-03-07-05-06

01-02-07-04-05-06

01-07-03-04-05-06

07-02-03-04-05-06

Por exemplo, se acertarmos a quadra composta pelas dezenas, 01-02-03-04, teremos três combinações de seis dezenas premiadas com a quadra , que são as seguintes:

01-02-03-04-05-06 $\rightarrow premiada$

01-02-03-04-05-07 $\rightarrow premiada$

01-02-03-04-07-06 $\rightarrow premiada$

Isto se explica pelo fato que, ao apostarmos sete dezenas e acertarmos quatro das sete dezenas, sobra-se três dezenas para formar uma combinação de seis dezenas com as quatro dezenas que acertamos.Portanto,teremos três combinações diferentes de seis dezenas com a mesma quadra.

Em termos combinatórios podemos combinar três dezenas em $C_{3;2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3 \cdot 2!}{2!1!} = 3$ grupos de duas dezenas distintas

Raciocínio semelhante usa-se no cálculo da quantidade de quinas que a Mega-Sena paga caso acertarmos cinco dezenas. Veja: Supondo que tenhamos acertado cinco dezenas das sete dezenas que apostamos acima. Por exemplo, as dezenas: 01-02-03-04-05.

Logo , teremos as seguintes combinações de seis dezenas distintas premiadas com a quina:

$$\left.\begin{array}{l} 01-02-03-04-05-06 \\ 01-02-03-04-05-07 \end{array}\right\} \rightarrow Premiadas\ com\ a\ quina$$

Isto se explica pelo fato que, ao apostarmos sete dezenas e acertarmos cinco, sobra-se duas dezenas para formar uma combinação de seis dezenas distintas com a quina que acertamos.Portanto, teremos duas combinações distintas premiadas com a quina. Em termos combinatórios temos, $C_{2;1} = \frac{2!}{1!(2-1)!} = \frac{2 \cdot 1!}{1!1!} = 2 \; grupos \; de \; duas \; dezenas \; distintas$

Genericamente, temos o seguinte: quando apostamos d dezenas, no caso de acertarmos faixa de premiação da quadra, ganharemos a seguinte quantidade de quadras; d-4 tomados 2 a 2 quadras.No caso de acertarmos a fixa de premiação da quina ganharemos ; d-5 tomado 1 a 1 quinas.

Podemos generalizar estes cálculos pela seguinte fórmula:

$$N_a = \binom{d-a}{6-a}; onde: N_a = n^o \; de \; combinações \; com \; "a" \; acertos$$

$$d = n^o \; de \; dezenas \; apostadas$$

Nos dois exemplos acima, temos para a aposta de sete dezenas :$N_4 = n^o \; de \; combinações \; com \; 4 \; acertos \;\; e \; ; d = 7$. Substituindo na fórmula acima obtemos;

$$N_4 = \binom{7-4}{6-4} = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = \frac{3!}{2!\,1!} = \frac{3 \cdot 2!}{2!\,1!}$$
$$= 3 \; combinações \; com \; uma \; quadra \; premiada$$

A tabela logo abaixo, também, deve ser explorada para explicar os cálculos das probabilidades das três faixas de premiação da mega-sena.

Probabilidade de acertar na Mega-Sena

Quantidade de nº apostados	Valor de aposta R$	Probabilidade de acerto 1 em...		
		Sena	Quina	Quadra
6	**2,50**	**50.063.860**	**154.518**	**2.332**
7	**17,50**	**7.151.980**	**44.981**	**1.038**
8	**70,00**	**1.787.995**	**17.192**	**539**
9	**210,00**	**595.998**	**7.791**	**312**
10	**525,00**	**238.399**	**3.973**	**195**
11	**1.155,00**	**108.363**	**2.211**	**129**

12	**2.310,00**	**54.182**	**1.317**	**90**
13	**4.290,00**	**29.175**	**828**	**65**
14	**7.507,50**	**16.671**	**544**	**48**
15	**12.512,50**	**10.003**	**370**	**37**

Fonte: tabela elaborada pelo autor.

Veja a fórmula que nos permite calcular as probabilidades da tabela acima.

$$ {}_{p}^{a}P = \frac{\binom{a}{p} \cdot \binom{60-a}{6-p}}{\binom{60}{6}} \ ; onde: a = nº\ de\ dezenas\ apostadas $$

$$ p = prêmio\ desejado, quadra, quina, sena. $$

$$ {}_{6}^{6}P = \frac{\binom{6}{6} \cdot \binom{60-6}{6-6}}{\binom{60}{6}} = \frac{\binom{54}{0}}{\binom{60}{6}} = \frac{1}{50.063.860} $$

$$ {}_{5}^{6}P = \frac{\binom{6}{5} \cdot \binom{60-6}{6-5}}{\binom{60}{6}} = \frac{6 \cdot \binom{54}{1}}{50.063.860} = \frac{6 \cdot 54}{50.063.860} = \frac{324}{50.063860} \approx \frac{1}{154.518} $$

$$ {}_{4}^{6}P = \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{60-6}{6-4}}{\binom{60}{6}} = \frac{15 \cdot \binom{54}{2}}{50.063.860} = \frac{15 \cdot 1.431}{50.063860} = \frac{21.465}{50.063860} \approx \frac{1}{2.332} $$

O jogo: “2 contra 23”

Objetivos

- Demonstrar os cálculos das probabilidades binomiais;
- Demonstrar ao aluno que as aparências de certos eventos probabilísticos engana muito e que a intuição falha na hora de tomar decisões de apostas como esta;
- Evidenciar que os conhecimentos de probabilidade é essencial na tomada de decisão para os mais diversos acontecimentos da vida, sejam naturais ou sociais.

Metodologia

Este jogo, de minha autoria, é baseado na loteria da CAIXA, Lotofácil.

A dinâmica deste jogo consiste em usar um bilhete da lotofácil, escolher um aluno e propor uma disputa em dez simulações de sorteios da Lotofácil com glóbulo contendo 25 bolinhas numeradas de 1 a 25 .

Desenvolvimento

As regras do jogo: “2 contra 23” , são as seguintes:

O aluno participante escolhe marcar 23 números em um universo de 25 números do bilhete da Lotofácil. Destes 23 números, ele deve acertar 15 números na extração dos 15 números do glóbulo.

Será realizado dez sorteios, em cada sorteio que o aluno acertar os quinze números, o professor paga um real a ele. No caso contrário, o aprendiz paga um real ao professor. Claro que não será utilizado dinheiro, apenas em termos simbólicos.

Para alguém que não tem conhecimento de probabilidade, terá uma intuição que a possibilidade do aluno ganhar neste jogo será grande.

Depois de encerrado o jogo, o professor deve explicar, através dos cálculos probabilísticos, por quer o aluno não conseguiu ganhar o jogo.

Para tanto, deve-se usar distribuição probabilística binomial e obteremos as seguintes probabilidades:

Probabilidades do jogo: “2 contra 23”				
Probabilidade de sucesso do aluno em cada sorteio	0,15	$\frac{C_{23;15}}{C_{25;15}} = \frac{490.314}{3.268.760} = 0,15$		
Probabilidade de fracasso do aluno em cada sorteio	0,85	$1 - \frac{C_{23;15}}{C_{25;15}} = 1 - \frac{490.314}{3.268.760} = 1 - 0,15 = 0,85$		
Ganho de sorteios	Probabilidades	Ganho do aluno		

10	$\frac{1}{173.415.299}$	R$10,00		
9	$\frac{1}{3.060.270}$	R$8,00		
8	$\frac{1}{120.011}$	R$6,00		
7	$\frac{1}{7.942}$	R$4,00		
6	$\frac{1}{801}$	R$2,00	Probabilidade do aluno ganhar o jogo	$\frac{1}{723}$
5	$\frac{1}{118}$	R$0,00	Probabilidade de empate	$\frac{1}{118}$
4	4,01%	-R$2,00	Probabilidade do aluno perder o jogo	99,01%
3	12,98%	-R$4,00		
2	27,59%	-R$6,00		
1	34,74%	-R$8,00		
0	19,69%	-R$10,00		

Fonte: tabela elaborada pelo autor

9.1 Resultados

Diante da aplicação dos dois jogos didáticos em uma de sala de aula 2º ano do Ensino Médio com 38 alunos, confirmou-se a expectativa probabilística de não haver acertadores da sena durante a realização de 40 sorteios.Também, confirmou-se a expectativa probabilística que o aluno não ganharia o jogo: “2 contra 23”.

Os alunos demonstraram interesse em participar dos dois jogos com muito entusiasmo, competitividade e interação entre os jogos e seus os conteúdos.

10. CONCLUSÃO

Em relação ao uso de jogos didáticos para o ensino de probabilidade, conclui-se que é uma metodologia de ensino que faz muita diferença na aprendizagem dos conteúdos de análise combinatória e probabilidade que tradicionalmente são apenas expostos de forma conceitual na lousa sem nenhuma vinculação com a realidade vivenciada pelos aprendizes.

Através deste trabalho procuramos evidenciar a importância do uso dos jogos como recurso para o ensino de Combinatória e Probabilidade de forma contextualizada. Apresentamos uma aplicação prática com alunos do Ensino Médio do uso dos jogos Mega-Sena Didática e 2 contra 23 inspirados nas loterias Mega-Sena e Lotofácil, respectivamente, no processo de ensino/aprendizagem da teoria da Combinatória e da teoria das Probabilidades.

Foi verificado que os alunos demonstraram grande interesse e participação, além da compreensão do conhecimento proposto, realidade nem sempre encontrada nas aulas de Matemática. Por meio dos dois jogos, acima citados, os aprendizes se apropriaram da linguagem e conceitos de Análise Combinatória e Probabilidade de forma gradual, dinâmica, interativa e com um resultado consistente, eles acompanharam todo o processo de construção do jogo e análise dos resultados.

Acreditamos que é preciso demonstrar a importância deste tipo de pedagogia a futuros e atuais professores de Matemática, para que assim, tenhamos a consciência de que mais importante que "ensinar Matemática", é formar cidadãos que sejam capazes de se expressar matematicamente, que saibam criar e manipular conceitos matemáticos segundo sua necessidade de vida em sociedade.

Nossa sociedade vive em constante transformação, na qual o conhecimento também se apresenta sempre em mudança, necessitando do professor uma reestruturação constante para lidar com esse conhecimento em mutação, possibilitando que os aprendizes o compreendam, e estejam prontos para enfrentar desafios e construir e reconstruir seu conhecimento, assim como a dinâmica da vida.

REFERÊNCIAS

COMPLEMENTARES AOS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS.

Ciências BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio / Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. – Brasília : Ministério da Educação, 1999.

LOPES, Celi Aparecida Espasandin. A Probabilidade e a Estatística no Ensino Fundamental: uma análise curricular. 1998. 125p. Dissertação (Mestrado em Educação) Faculdade de Educação da UNICAMP, Campinas: 1998.

LOPES, José Marcos. **O ensino de probabilidade através de um jogo de dados e da metodologia de resolução de problemas:** mini curso, 2008.

MONTEIRO, C.; História da Loteria. 2007. Disponível em :http://laser.hsw.uol.com.br/loterias-brasil2.htm.

MOURA, M. O. *O jogo e a construção do conhecimento matemático*. São Paulo: FDE, 1992. (Série

Idéias, 10).

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS. **Introdução aos parâmetros curriculares nacionais.** Secretaria de Educação Fundamental – Brasília: MEC/SEF, 1997.

PCN + ENSINO MÉDIO – ORIENTAÇÕES EDUCACIONAIS. BRASIL, 2002